

Introduction à l'Économie

Renaud Bourlès Nicolas Cloutens

Centrale Marseille
Aix-Marseille School of Economics

2022-2023

Risque et temps

Choix et temps

- ▶ Dans de nombreux cas : investissement, éducation, épargne,...
- ▶ les décisions économiques impliquent des coûts et des bénéfices
- ▶ qui surviennent à différentes périodes.

- ▶ Pour analyser ces choix, il est nécessaire de pouvoir comparer
- ▶ coûts et bénéfices, i.e. de pouvoir **comparer différentes périodes** entre elles.

- ▶ Les choix optimaux d'épargne ou d'éducation dépendront alors
- ▶ d'un arbitrage entre les coûts présents
 - ▶ frais d'inscription, coûts d'opportunité
- ▶ et les bénéfices futurs
 - ▶ emploi, salaire, consommation future avec intérêts
- ▶ qu'il faut évaluer au moment du choix.
- ▶ (Le raisonnement complémentaire peut être tenu pour l'emprunt)

Valeur du futur et taux d'intérêt

- ▶ La plupart des agents économiques ont une **préférence pour le présent** :
- ▶ toutes choses égales par ailleurs, ils préfèrent une satisfaction immédiate
- ▶ à une satisfaction différée.

- ▶ Ainsi, il semblerait que le présent ait une valeur plus élevée que le futur

- ▶ Mais comment mesurer cette différence de valeur?

- ▶ Le taux d'intérêt entre deux dates t et $t + 1$ représente
 - ▶ le supplément de revenu qu'il est possible d'obtenir en $t + 1$
 - ▶ en **renonçant** à utiliser ce revenu en t .

- ▶ Il reflète donc la valeur d'un 1€ de t en $t + 1$

Capitalisation et actualisation : rappel de comptabilité

- ▶ Ainsi en supposant le taux d'intérêt, noté r , constant entre deux périodes
 - ▶ 1 euro aujourd'hui vaudra $(1 + r)$ euros après une période,
 - ▶ $(1 + r)^2$ euros après deux périodes
 - ▶ l'individu "renonce" à ses intérêts de la première période
 - ▶ et plus généralement $(1 + r)^n$ euros après n périodes.
- ▶ On obtient ainsi la **valeur future** d'un euro présent, et on parle de capitalisation
- ▶ L'opération inverse : l'actualisation et donne la **valeur présente** d'un euro futur.
- ▶ Si le taux d'intérêt entre deux périodes est r , un euro dans une période vaut
- ▶ $\frac{1}{1+r} \equiv \delta$ euro aujourd'hui (δ est appelé facteur d'actualisation)
- ▶ et un euro dans n périodes vaut δ^n (quand r est constant)
- ▶ Si $r > 0$, $\delta < 1$ reflétant la préférence pour le présent

Choix intertemporels

- ▶ Cette notion d'actualisation peut être étendue aux choix intertemporels
- ▶ via la notion d'actualisation d'utilité (ou de satisfaction).
- ▶ Si le facteur d'actualisation n'est pas nécessairement celui calculé au dessus
 - ▶ et dépend du degré de préférence pour le présent pour le choix considéré
- ▶ l'utilité future sera actualisée pour être rendue comparable à l'utilité présente.
- ▶ Un agent devant opérer un choix conduisant à des alternatives
- ▶ a_1 en période 1 et a_2 en période 2 cherchera donc à maximiser :

$$u(a_1) + \delta u(a_2)$$

- ▶ avec δ le facteur d'actualisation

Investissement : valeur actuelle nette

- ▶ L'actualisation financière permet de mettre en regard
- ▶ les coûts présents et les bénéfices futurs
- ▶ dans le cadre d'investissements ou de projets à long terme.

- ▶ La notion de **valeur actuelle nette** (VAN), ou net present value (NPV)
- ▶ généralise l'analyse coût-bénéfice dans un cadre intertemporel :
- ▶ en notant C_t et B_t les coûts et bénéfices d'un projet au temps t
- ▶ sa valeur actuelle nette (à r constant) s'écrira :

$$VAN = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{B_t - C_t}{(1 + r)^t}$$

- ▶ La VAN est utile pour déterminer l'opportunité d'un investissement
- ▶ et pour comparer divers projets entre eux.

Valorisation financière : l'actualisation des flux

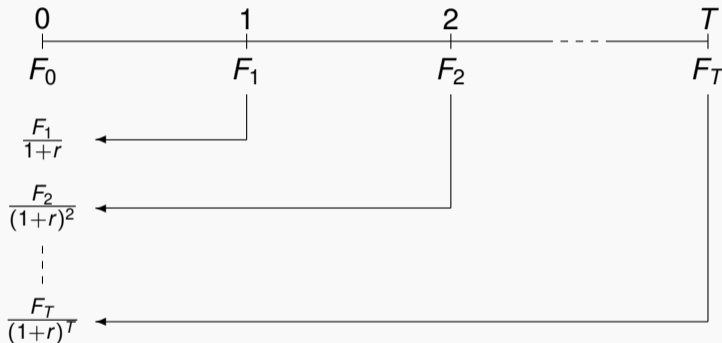
- ▶ La notion de VAN est au centre de la valorisation financière :
- ▶ la valeur d'un produit (ou titre) financier, c'est-à-dire
 - ▶ d'un contrat spécifiant une séquence de flux financiers
- ▶ sera la somme actualisée de ses flux.

- ▶ Selon les produits, les flux financiers pourront dépendre d'événements
- ▶ aléatoires et seront donc **probabilisés** pour calculer la valeur du titre.

- ▶ Ce principe s'applique aussi bien
 - ▶ en assurance (on parlera de valeur actuarielle)
 - ▶ en finance de marché, pour valoriser un titre s'échangeant sur les marchés
 - ▶ en finance d'entreprise, pour valoriser une entreprise ou un projet en vue d'une transaction ou d'un investissement

L'actualisation des flux : un exemple

- ▶ Un projet, une entreprise, ou un titre générant des flux financiers (espérés)
- ▶ $F_0 \text{€}, F_1 \text{€}, \dots, F_T \text{€}$ aux années 0, 1, ..., T sera valorisé(e) (à r constant)



- ▶ $F_0 + \frac{F_1}{1+r} + \frac{F_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{F_T}{(1+r)^T} \text{€}$
- ▶ Cette méthode appelée DCF ("discounted cash flow") est utilisée
 - ▶ comme base aux discussions de fusion-acquisition ou
 - ▶ de financement de projet (ENR, infrastructure,...)

À quel taux actualiser?

- ▶ Si le principe de la méthode est assez simple,
- ▶ la détermination de ses intrants est souvent complexe.

- ▶ En finance d'entreprise, la détermination des flux futurs
- ▶ repose sur la modélisation de l'évolution des profits générés
- ▶ par l'entreprise ou le projet (**business plan**, coût/bénéfice d'exploitation,...).

- ▶ En finance de marché, la détermination des probabilités de ces flux
- ▶ repose sur une **modélisation stochastique** de la variation du prix des titres.

- ▶ Dans les deux cas, la détermination du taux r sur la base duquel
- ▶ les flux sont actualisés est primordiale.

À quel taux actualiser? Le cas de la finance d'entreprise.

- ▶ En finance d'entreprise, la taux généralement utilisé pour l'actualisation
- ▶ reflète le **coût du capital** pour l'entreprise, i.e. le coût auquel elle se finance
- ▶ On retrouve ici l'analogie entre capitalisation et actualisation.
- ▶ Pour prendre en compte les diverses **sources de financement** des entreprises
- ▶ on utilise généralement un coût du capital moyen pondéré (ou WACC)
- ▶ prenant en compte à la fois le coût de la dette
 - ▶ i.e. le taux d'intérêt sur les emprunts
- ▶ et le coût des fonds propres
 - ▶ i.e. le rendement attendu par les actionnaires
 - ▶ calculé à l'aide du Modèle d'Evaluation des Actifs Financiers (étudié en 2A)
- ▶ pondérés par leur poids respectifs dans les ressources de l'entreprise.

→ le taux d'actualisation prend en compte le **risque** propre à l'entreprise

À quel taux actualiser? Le cas de la finance de marché.

- ▶ Lorsqu'on valorise un titre échangé sur les marchés financiers,
- ▶ le risque, la partie aléatoire, est pris en compte via la probabilisation des flux.
- ▶ L'actualisation doit donc se faire au **taux sans risque**.

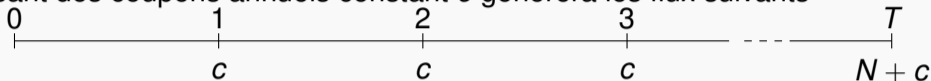
- ▶ Ce taux est approximé par le taux d'intérêt demandé aux États
- ▶ les plus solvables, ceux dont le risque de défaut est le plus faible.

- ▶ On utilise pour cela les obligations émises par ces États sur le marché.

- ▶ Une obligation est un titre adossé à un emprunt
 - ▶ émis par une entreprise ou un gouvernement
- ▶ pouvant être échangés sur les marchés financier, et
- ▶ versant à son détenteur des coupons (les intérêts) à échéances fixes
- ▶ et remboursant le nominal (ou valeur faciale) à échéance.

Obligations zéro-coupon et taux sans risque

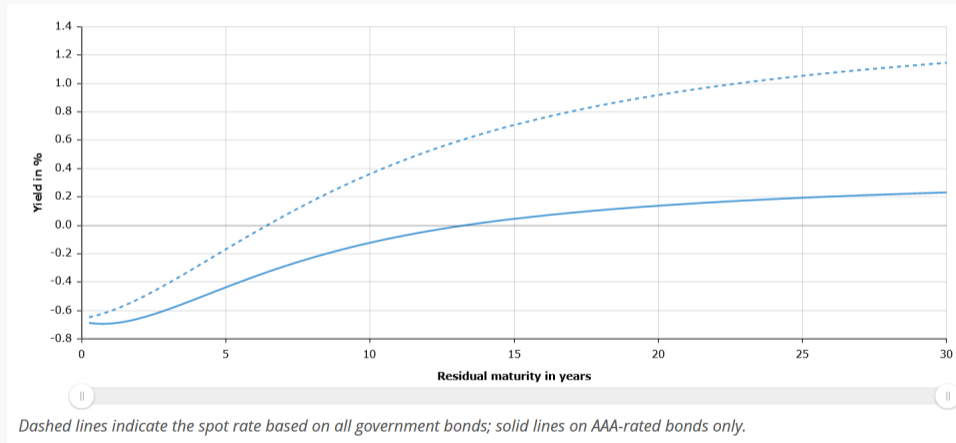
- ▶ Par exemple, une obligation de valeur faciale N et d'échéance T
- ▶ versant des coupons annuels constant c générera les flux suivants



- ▶ Les montants c et N étant fixées dès le début du contrat,
- ▶ le seul risque d'une obligation réside dans le **défaut** de l'emprunteur.
- ▶ En supposant que celui-ci est nul pour les États les plus solvables,
- ▶ les obligations zéro-coupon ($c = 0$) d'échéance T qu'ils émettent valent
- ▶ $\frac{N}{(1+r(0,T))^T}$ où $r(0, T)$ est le taux annuel sans risque entre 0 et T
- ▶ On peut donc retrouver les taux sans risque à partir du prix de ces obligations

Courbe des taux

- ▶ En utilisant le prix des obligations émises à diverses échéances, on obtient
- ▶ les divers taux nécessaires à l'actualisation, résumé dans la courbe des taux



Courbe des taux de la zone Euro (Source : BCE)

Courbe des taux : remarques

On remarque ici :

1. Que les taux sont plus élevés pour les obligations d'état non notées AAA.
 - ▶ Du fait du plus grand risque de défaut perçu,
 - ▶ les investisseurs demandent un rendement plus élevé sur ces titres.
 - ▶ On parle de **spread** de taux.

2. Que certains taux sont négatifs.
 - ▶ Du fait de la forte **demande** pour les obligations de court-terme,
 - ▶ liée à des contraintes réglementaires (pour les banques ou les assureurs)
 - ▶ ou à des choix de gestion de portefeuille (que non étudierons ci-après)
 - ▶ leur prix a baissé jusqu'à correspondre à des taux d'intérêt négatifs.

Valorisation des actifs financiers : l'arbitrage

- ▶ On a supposé jusqu'ici que la valeur d'un actif financier était égale
- ▶ à la valeur actualisée des flux qu'il génère.

- ▶ Ceci est dû à une hypothèse centrale de la finance :
l'absence d'opportunité d'arbitrage

Definition

On appelle opportunité d'arbitrage, l'existence d'une stratégie (d'achat et de vente de titres) permettant à coup sûr (i.e. sans risque) de réaliser un gain immédiat.

- ▶ L'intuition est que si il existait de telles opportunités,
- ▶ elles seraient immédiatement saisies et disparaîtraient.
(un professeur de finance ne ramassera jamais un billet de 100€ par terre)

Valorisation des actifs financiers : loi du prix unique

- ▶ Ainsi, deux actifs (ou stratégies) conduisant à la même séquence
- ▶ de flux financiers doivent avoir le même prix (ou le même coût).
- ▶ Dans le cas contraire, en vendant l'un et achetant l'autre, un investisseur
- ▶ pourrait réaliser un gain immédiat à coup sûr.
- ▶ Comme on peut reproduire n'importe quelle séquence de flux F_1, F_2, \dots, F_T
- ▶ en achetant des zéro-coupon sans risque d'échéance $1, 2, \dots, T$,
- ▶ le prix d'un actif générant ces flux doit être égal à

$$p(0, 1).F_1 + p(0, 2).F_2 + \dots + p(0, T).F_T$$

- ▶ où $p(0, t)$ est le prix du zéro-coupon d'échéance t et de nominal 1
- ▶ soit d'après les définitions ci-dessous, la somme actualisé des flux :

$$\frac{F_1}{1 + r(0, 1)} + \frac{F_1}{(1 + r(0, 2))^2} + \dots + \frac{F_T}{(1 + r(0, T))^T}$$

Les marchés financiers : risque et temps

- ▶ La plupart des décisions impliquant un décalage temporelle (investissement, éducation, emprunt,...)
- ▶ impliquent également du risque, de l'incertitude (quant au rendement de l'investissement, ou du diplôme par exemple).
- ▶ Comprendre (ou modéliser) ces décisions nécessite donc
- ▶ d'analyser le **comportement** des acteurs en situation d'incertitude.
- ▶ Ceci permet également de mieux comprendre le fonctionnement
- ▶ des marchés financiers (au sens large), dont le rôle est à la fois
 1. de **financer** les investissements (via les produits discutés précédemment)
 2. d'offrir des **couvertures** face au risque
 - ▶ de taux de change, de prix des matières premières,...

Préférences et risque

- ▶ L'existence d'un risque, d'une partie d'aléatoire
- ▶ dans les conséquences d'un choix, nous amène à devoir
- ▶ formuler les préférences des agents sur des variables aléatoires
- ▶ appelées *loteries* (qui sont les alternatives du choix).

Definition

Une loterie est une variable aléatoire réelle sur un espace probabilisé décrivant les résultats/réalisations possibles du risque.

- ▶ La représentation sous forme de fonction d'utilité sur ces loteries
- ▶ peut alors être simplifiée en imposant des conditions supplémentaires
- ▶ sur les préférences (i.e. la relation d'ordre sur les loteries)

Le critère d'espérance d'utilité

- ▶ En effet, si en plus d'être
 1. complètes : \forall loteries $L, M: L \prec M, L \sim M$ ou $L \succ M$, et
 2. transitives : si $L \preceq M$ et $M \preceq N$, alors $L \preceq N$
- ▶ les préférences sur les loteries sont (conditions nécessaires et suffisantes)
- 3. continues : si $L \preceq M \preceq N$, alors $\exists p \in [0, 1] : pL + (1 - p)N \sim M$, et
- 4. indépendantes : si $L \prec M$ alors $\forall N, \forall p \in (0, 1]$:

$$pL + (1 - p)N \prec pM + (1 - p)N$$

- ▶ il existe une fonction $u(\cdot)$ continue (de l'espace des résultats vers \mathbb{R}) telle que :

$$L \prec M \Leftrightarrow \mathbb{E}(u(L)) < \mathbb{E}(u(M))$$

- ▶ On peut alors définir une fonction d'utilité sur les résultats
- ▶ et appliquer le critère de l'espérance pour représenter les préférences.
- ▶ (comme précédemment cette représentation n'est pas unique)

Le paradoxe de Saint-Pétersbourg

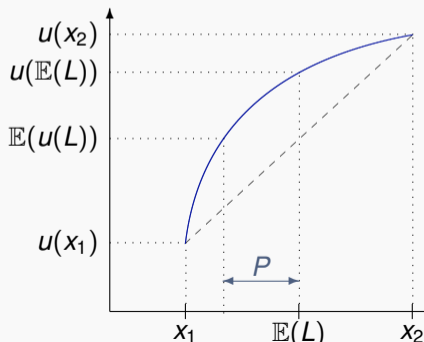
- ▶ On voit ici que si $u(\cdot)$ est linéaire, l'agent économique ne base sa décision que
- ▶ sur l'espérance des résultats (et non sur leur distribution).
- ▶ Cette hypothèse a toutefois été réfutée dès 1713 par Bernoulli
- ▶ via l'expérience (de pensée) suivante :
- ▶ Imaginons un jeu de pile ou face, dans lequel je m'engage à vous verser
- ▶ 2^{n-1}€ si face apparaît pour la première fois au $n^{\text{ième}}$ lancer.
- ▶ L'espérance de gain est infinie :
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 2^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$$
- ▶ mais personne ne semble prêt à payer autant pour y participer.
- ▶ Ainsi dans ce cas : $\mathbb{E}(u(L)) < u(\mathbb{E}(L))$

Aversion au risque et prime de risque

- ▶ On retrouve ici la définition de la **concavité**
 - ▶ l'image de la moyenne est supérieure à la moyenne des images
- ▶ et on parlera d'**aversion au risque**.
- ▶ Lorsque $u(\cdot)$ est concave, l'agent est prêt à payer pour faire disparaître l'aléa :
si $\mathbb{E}(u(L)) < u(\mathbb{E}(L))$, $\exists P \in \mathbb{R}^+ : \mathbb{E}(u(L)) = u(\mathbb{E}(L) - P)$
- ▶ on appellera P la **prime de risque**

Par exemple lorsque L prend deux valeurs x_1 et x_2 avec équiprobabilité :

(Quand l'espace des résultats est la richesse ou le revenu, on peut raisonnablement supposer la fonction d'utilité croissante.)



Degré d'aversion au risque et prime de risque

- ▶ Pour un risque donné, la prime de risque mesure alors l'aversion au risque :
 - ▶ + un agent est averse au risque, + il est prêt à payer pour le faire disparaître.
 - ▶ Le degré d'aversion au risque est ainsi lié au degré de concavité de $u(\cdot)$.
 - ▶ Pour le voir, considérons le cas d'un agent de richesse R ,
 - ▶ soumis à un risque d'espérance nulle, dont on fera varier la taille.
 - ▶ Plus précisément, on suppose que l'agent fait face à la loterie :
- $$L = R + k\tilde{\varepsilon} \text{ avec } k \in \mathbb{R}^+, \mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}) = 0 \text{ et } \text{Var}(\tilde{\varepsilon}) = \sigma^2$$
- ▶ et on étudie l'effet de k sur la prime de risque $P(k)$ correspondante :

$$\mathbb{E}(u(R + k\tilde{\varepsilon})) = u(R - P(k))$$

Approximation de la prime de risque

- ▶ Pour de petites valeurs de k , au voisinage de 0, on a :

$$P(k) \sim P(0) + kP'(0) + \frac{k^2}{2}P''(0)$$

- ▶ Or, par définition, $P(0) = 0$ et en différenciant (*) par rapport à k on obtient :

$$\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}u'(R + k\tilde{\varepsilon})) = -P'(k)u'(R - P(k))$$

- ▶ soit en $k = 0$: $\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon})u'(R) = -P'(0)u'(R)$ donnant $P'(0) = 0$ puisque $\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}) = 0$

- ▶ En différenciant de nouveau (*) on obtient finalement

$$\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}^2 u''(R + k\tilde{\varepsilon})) = (P'(k))^2 u''(R - P(k)) - P''(k)u'(R - P(k))$$

- ▶ Soit en $k = 0$: $P''(0) = \sigma^2 \frac{-u''(R)}{u'(R)}$

L'indice d'aversion au risque

- ▶ Ainsi en notant que $k^2\sigma^2 = \text{Var}(L)$, on obtient que

Proposition

Pour de petits risques, la prime de risque peut-être approximé par

$$P(L) \sim \frac{\text{Var}(L)}{2} \frac{-u''(R)}{u'(R)}$$

i.e. le produit de (1) la moitié de la variance du risque et (2) d'un indice du degré de concavité locale de la fonction d'utilité, appelé indice d'aversion au risque.

- ▶ L'indice d'aversion au risque noté $A(R) \equiv \frac{-u''(R)}{u'(R)}$ est alors
- ▶ indépendant du risque considéré et ne dépend que du niveau de richesse.
- ▶ Il peut être croissant, décroissant ou constant dans ce niveau de richesse,
- ▶ en fonction des préférences de l'agent.

Choix simple de portefeuille

- ▶ Cette modélisation des choix en univers risqué,
- ▶ nous permet de comprendre les choix d'investissement des agents
- ▶ dans un modèle simple où ils doivent allouer leur richesse R entre
 - ▶ un actif sans risque, fournissant un rendement certain r , et
 - ▶ un **actif risqué**, dont le rendement \tilde{x} est aléatoire.

- ▶ Investir un montant α dans l'actif risqué donne alors
- ▶ à la fin de la période d'investissement, une richesse égale à :

$$(R - \alpha)(1 + r) + \alpha(1 + \tilde{x})$$

- ▶ qu'on peut réécrire comme

$$R(1 + r) + \alpha(\tilde{x} - r) = R_1 + \alpha\tilde{y}$$

- ▶ où R_1 est la valeur future de R (obtenue en plaçant R dans l'actif sans risque)
- ▶ et \tilde{y} représente le rendement excédentaire de l'actif risqué (aléatoire)

Allocation optimale et rendements

- ▶ D'après ce qu'on a vu précédemment, le **choix optimal** revient alors
- ▶ à choisir la valeur d' α qui maximise l'espérance d'utilité :

$$V(\alpha) = \max_{\alpha} \mathbb{E}(u(R_1 + \alpha\tilde{y}))$$

- ▶ avec $V'(\alpha) = \mathbb{E}(\tilde{y}u'(R_1 + \alpha\tilde{y}))$ et $V''(\alpha) = \mathbb{E}(\tilde{y}^2u''(R_1 + \alpha\tilde{y}))$
- ▶ Ainsi α sera strictement positif si et seulement si $V'(0) > 0$
- ▶ lorsque l'agent considéré est averse au risque (alors $u''(\cdot) < 0 \Rightarrow V''(\alpha) < 0$).
- ▶ L'utilité croissante étant croissante dans la richesse,
- ▶ cela ne sera possible que si $\mathbb{E}(\tilde{y}) > 0$.
- ▶ Ainsi, un agent averse au risque ne souhaitera investir dans un actif risqué
- ▶ que si son **espérance de rendement** > rendement de l'actif sans risque.

Allocation optimale et petits risques

- ▶ Alors, comme précédemment, une approximation pour de petits risques
- ▶ permet de comprendre certains des mécanismes en jeu.
- ▶ En considérant $\tilde{y} = k + \tilde{\varepsilon}$ avec $k \in \mathbb{R}^+$ et $\mathbb{E}(\varepsilon) = 0$,
- ▶ l'allocation optimale en fonction de k est donnée par $\alpha^*(k)$ tel que :

$$\mathbb{E} [(k + \tilde{\varepsilon})u'(R_1 + \alpha^*(k)(k + \tilde{\varepsilon}))] = 0 \quad (**)$$

- ▶ et au voisinage de $k = 0$: $\alpha^*(k) \sim \alpha^*(0) + k\alpha^{*'}(0)$
- ▶ Or, d'après le résultat précédent, $\alpha^*(0) = 0$ (on a alors $\mathbb{E}(\tilde{y}) = \mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}) = 0$).
- ▶ Ainsi en différenciant (**) par rapport à k et en évaluant en $k = 0$, on obtient :

$$u'(R_1) + \alpha^{*'}(0)\mathbb{E}(\tilde{\varepsilon}^2)u''(R_1) = 0 \Rightarrow \alpha^{*'}(0) = \frac{1}{\text{Var}(\tilde{\varepsilon})} \frac{-u'(R_1)}{u''(R_1)}$$

Allocation optimale, rendement, risque et préférences

- ▶ Ceci nous permet d'approximer l'investissement optimal par

$$\alpha^*(k) \sim \frac{k}{\text{Var}(\tilde{\epsilon})} \frac{-u'(R_1)}{u''(R_1)} = \frac{\mathbb{E}(\tilde{y})}{\text{Var}(\tilde{y})} \frac{1}{A(R_1)}$$

- ▶ L'investissement optimal dans l'actif risqué est alors :

1. proportionnel à l'espérance de son rendement (excédentaire), et

2. inversement proportionnel

- ▶ à son risque (mesuré par la variance de son rendement), et

- ▶ à l'aversion au risque de l'investisseur